forflyttes en avstand $\Delta\vec{r}$ er derfor

$$\Delta T = e\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} \tag{7.46}$$

som kan brukes til å definere den elektriske feltstyrke i mer elementære fremstillinger av elektrodynamikken.

## 7.4 Relativistisk Coulomb-bevegelse

En partikkel som beveger seg i et statisk Coloumb-potensial

$$A^o = \phi(r) = -\frac{e}{4\pi r} \tag{7.47}$$

har en Lagrange-funksjon (7.35) som i sfæriske polarkoordinater blir

$$L = \frac{m}{2}\,[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) - \dot{t}^2] + \frac{e^2}{4\pi r}\,\dot{t}\ . \tag{7.48}$$

Heretter vil vi kalle konstanten $\frac{e^2}{4\pi} = km$. Vi ser at $L$ har ingen eksplisitt avhengighet av $t$ eller $\phi$. Problemet har derfor to konstante impulser:

$$p_t = -mE = \frac{\partial L}{\partial\dot{t}} = m(-\dot{t} + \frac{k}{r}) \tag{7.49}$$

$$p_\phi = +mL = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}\ . \tag{7.50}$$

Konstantene $E$ og $L$ er derfor komponenter av 4-hastigheten. Da dreie-impulsen $p_\phi$ er bevart betyr det at bevegelsen foregår i et plan. Beregningene blir spesielt enkle hvis vi velger koordinatsystemet slik at dette baneplanet faller sammen med planet $\theta = \frac{\pi}{2}$. Da blir

$$L = r^2\dot{\phi} \tag{7.51}$$

og den radielle Euler-ligning gir

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \frac{k}{r^2}\,\dot{t} = 0 \tag{7.52}$$

som med innføring av bevegelseskonstanten $E$ og $L$ blir

$$\ddot{r} - \frac{L^2 - k^2}{r^3} + \frac{kE}{r^2} = 0, \tag{7.53}$$

Denne integreres lett ved å innføre $u = \frac{1}{r}$ som ny, avhengig variabel samtidig som banen parametriseres ved vinkelen $\phi$ istedet for egentiden $\tau$ :

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\tau} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\phi}\dot{\phi} = -L\frac{du}{d\phi} .$$

Dermed antar Eq.(7.53) formen

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + \left(1 - \frac{k^2}{L^2}\right) u = \frac{kE}{L^2} \tag{7.54}$$

som har den generelle løsning

$$u = \frac{1}{p}(1 - \varepsilon \cos f\phi) \tag{7.55}$$

hvor

$$f^2 = 1 - \frac{k^2}{L^2} \tag{7.56}$$

$$p = \frac{L^2 - k^2}{HE} \tag{7.57}$$

og $\varepsilon$ er en ubestemt integrasjonskonstant. Uttrykt ved $r$ antar løsningen den mer kjente form

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos f\phi} . \tag{7.58}$$

Er $\varepsilon < 1$ og $f = 1$, vil dette representere en lukket ellipse som er den ikke-relativistiske løsning. Men fra Eq.(7.56) ser vi at $f < 1$ slik at ellipsen ikke er lukket. Vinkelen $\phi$ må vokse med mer enn $2\pi$ for at partikkelen skal komme frem til et punkt med samme avstand $r$,

$$f(2\pi + \Delta\phi) = 2\pi$$

i.e.

$$\Delta\phi = 2\pi\left(\frac{1}{f} - 1\right). \tag{7.59}$$

Dette tilsvarer at hovedaksen i bane-ellipsen ikke ligger i ro, men dreier seg om en vinkel $\Delta\phi$ for hver omgang. Vi sier at banen presesserer. Er den relativistiske effekt liten, vil

$$f \simeq 1 - \frac{k^2}{2L^2} \qquad (7.60)$$

slik at presisjonsvinkelen blir

$$\Delta\phi \simeq \pi \frac{k^2}{L^2} \quad . \qquad (7.61)$$

Vi vil komme tilbake til den samme effekt når vi skal behandle det relativistiske Kepler-problem.

## 7.5 Bevarelse av elektrisk ladning

Tar vi divergensen av Maxwell's andre ligning, Eq. (7.2),

$$-\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} , \qquad (7.62)$$

får vi ved å benytte den første, Eq. (7.1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \; . \qquad (7.63)$$

Det kalles kontinuitetsligningen for strømmen og den gir bevarelse av elektrisk ladning. Tenker vi oss nemlig et integrasjonsvolum $V$, vil den totale ladning innen volumet være

$$Q(t) = \int_V d^3x \; \rho(\underline{x},t) \; . \qquad (7.64)$$

Forandringen av denne ladning er gitt som

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V d^3x \; \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

som ved hjelp av kontinuitetsligningen og integralsatsen til Gauss, Eq.(4.43), kan skrives som

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{J} \, . \qquad (7.65)$$

Høyresiden i denne ligningen representerer ladningen som strømmer ut av