

10. DIFFERENSIELL GEOMETRI PÅ FLATER

Vi har allerede sett indikasjoner på at geometrien i rom med gravitasjonsfelt er ikke-euklidisk. Partikler beveger seg for eksempel langs geodetiske linjer som ikke lenger er rette. Dette er typisk for rom som vi sier er krummet. Vi kan lett forestille oss krumningen til kurver og 2-dimensjonale flater. Betraktelig mer vanskelig om ikke helt umulig blir det å ha en følelse for hvordan krumningen arter seg i rom med høyere dimensjon. Men da krumningen til slike rom kan diskuteres ved å legge inn kurver og flater, er det klart at det er viktig å ha godt kjennskap til den differensielle flategeometri. Vi skal i dette kapittel gjennomgå de nødvendige element av denne nydelige, matematiske disiplin. Formalismen og betraktningsmåten kan vi så ta direkte over til å gjelde også i det krumme, 4-dimensjonale tidrom.

10.1 Romkurver

En romkurve er en kontinuerlig avbildning av den rette linje R på punkter i det 3-dimensjonale, euklidiske rom E^3 . Er R parametrisert ved λ , er derfor hvert punkt på romkurven gitt ved

$$\vec{r} = \vec{r}(\lambda) = x^k(\lambda) \vec{e}_k. \quad (10.1)$$

Dette er illustrert for to forskjellige verdier av kurveparameteren i Fig. 10.1.

Lengden av kurven kan finnes fra det differensielle linjeelementet

$$\Delta s^2 = \Delta \vec{r} \cdot \Delta \vec{r} = \Delta x^k \Delta x_k$$

i.e. $\Delta s = \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta \lambda} \right| \Delta \lambda \quad (10.2)$

hvor den differensielle vektoren $\Delta \vec{r}$ er tegnet inn i Fig. 10.1.

Ved integrasjon er dermed kurvelengden mellom parameterverdiene λ_0 og λ :

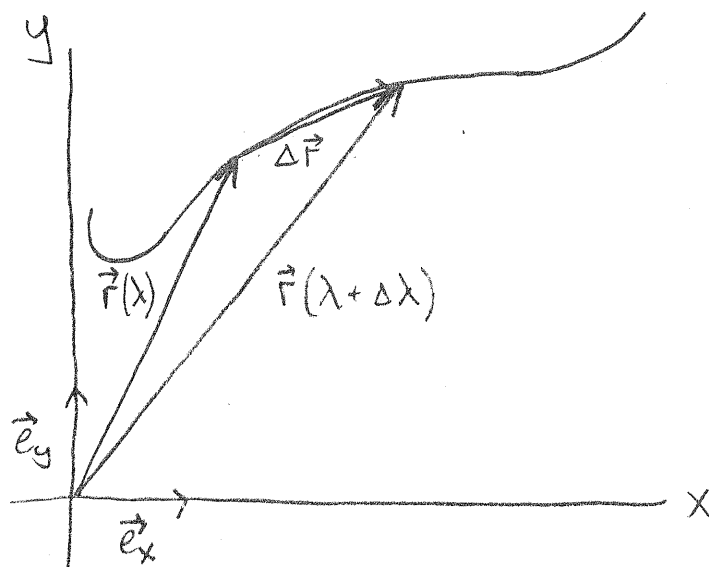


Fig. 10.1: Hvert punkt på romkurven er angitt ved posisjonsvektor $\vec{r}(\lambda)$.

$$s(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right|. \quad (10.3)$$

Vi ser at den er gitt ved lengden av tangentvektoren

$$\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(\lambda + \Delta\lambda) - \vec{r}(\lambda)}{\Delta\lambda} \quad (10.4)$$

som varierer fra punkt til punkt på kurven. Det er praktisk å normere alle disse tangentvektorene slik at de har samme lengde:

$$\vec{t} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\lambda}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right|} = \frac{d\vec{r}}{ds}. \quad (10.5)$$

Dermed er $t^2 = \vec{t} \cdot \vec{t} = 1$ (10.6)

når vi bruker (Eq. (10.2)). Dette resultat gjør det naturlig å reparametrisere kurven ved dens buelengde s fra Eq.(10.3) istedet for λ :

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = x^k(s) \vec{e}_k \quad (10.7)$$

Det er derfor vanlig å kalle denne form for kurvens naturlige parametrisering.

Desto raskere tangentvektoren $\vec{t}$ varierer langs kurven, desto større er kurvens krumning. Man definerer derfor krumningsvektoren som

$$\vec{k} = \frac{d\vec{t}}{ds} . \quad (10.8)$$

Fra Eq.(10.6) ser vi ved derivasjon at den står normalt på tangentvektoren,

$$\frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{t} + \vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$$

$$\text{i.e.} \quad \vec{k} \cdot \vec{t} = 0 . \quad (10.9)$$

Lengden av krumningsvektoren kalles kurvens krumning,

$$\kappa = |\vec{k}| , \quad (10.10)$$

$$\text{mens} \quad \rho = \frac{1}{\kappa} \quad (10.11)$$

er dens krumningsradius. Disse betegnelser er inspirert av sirkelen

$$\vec{r}(\theta) = a \cos\theta \vec{e}_x + a \sin\theta \vec{e}_y \quad (10.12)$$

$$\text{med tangentvektor} \quad \vec{t} = -\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y \quad (10.13)$$

$$\begin{aligned} \text{og krumningsvektor} \quad \vec{k} &= \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \\ &= -\frac{1}{a} (\cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y) \end{aligned} \quad (10.14)$$

som begge er vist i Fig. 10.2. Sirkelens krumningsradius er derfor $\rho = a$ som en skulle vente.

En kurve med null krumning er en rett linje. Da er nemlig

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}_0$$

en konstant vektor slik at

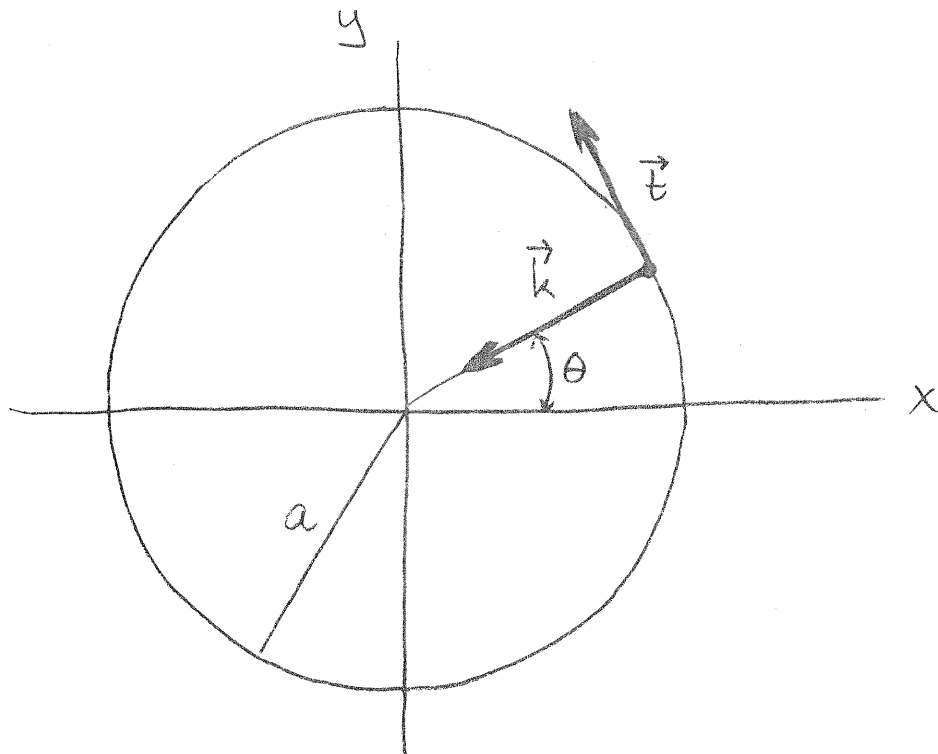


Fig. 10.2: Tangent- og krumningsvektor for sirkel.

$$\vec{r}(s) = \vec{t}_0 s + \vec{a} \quad (10.15)$$

som er ligningen for linjen.

Krumningsvektoren til en kurve kan generelt skrives som

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{k} = \kappa \vec{n} \quad (10.16)$$

hvor vektoren $\vec{n}$ er hovednormalen til kurven. Den har konstant lengde

$$n^2 = \vec{n} \cdot \vec{n} = 1 \quad (10.17)$$

og kan benyttes til å konstruere et ortonormert aksekors i hvert punkt på kurven. Dette består av $\vec{t}$, $\vec{n}$ og binormalen

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} . \quad (10.18)$$

Alle disse vektorene varierer langs kurven. Tangentvektoren $\vec{t}$ flytter seg ifølge Eq.(10.16). Fra Eq.(10.17) ser vi at $\frac{d\vec{n}}{ds}$ er ortogonal til $\vec{n}$. Derfor må vi kunne skrive

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \mu \vec{t} + \tau \vec{b} \quad (10.19)$$

hvor koeffisientene μ og τ foreløpig er ukjente. Vi kan nå benytte dette resultatet til å finne hvordan binormalen (10.18) varierer langs kurven:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{b}}{ds} &= \frac{d\vec{t}}{ds} \times \vec{n} + \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \\ &= -\tau \vec{n} \end{aligned} \quad (10.20)$$

$$\text{Da nå} \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} \quad (10.21)$$

$$\begin{aligned} \text{vil} \quad \frac{d\vec{n}}{ds} &= \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{t} + \vec{b} \times \frac{d\vec{t}}{ds} \\ &= \tau \vec{b} - \kappa \vec{t} . \end{aligned} \quad (10.22)$$

Disse ligninger, (10.16, (10.20) og (10.22) kalles Frenet's ligninger.

Vi samler dem her:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n} \quad (10.23a)$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b} \quad (10.23b)$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n} \quad (10.23c)$$

De inneholder all nødvendig informasjon om hvordan en fra aksekorsets variasjon langs kurven kan bestemme kurven selv. Man trenger kun kjennskap til krumningen $\kappa(s)$ samt kurvens torsjon $\tau(s)$.

Kurver med null torsjon er plane. Da vil nemlig binormalen

$$\vec{b} = \text{konst} = \vec{b}_0 \quad \text{og}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (\vec{r} \cdot \vec{b}_0) &= \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{b}_0 + \vec{r} \cdot \frac{d\vec{b}_0}{ds} \\ &= \vec{t} \cdot \vec{b}_0 = 0 \end{aligned}$$

slik at kurven $\vec{r}(s)$ ligger i planet $\vec{r} \cdot \vec{b}_0 = \text{konst.}$

Som allerede nevnt, danner de tre vektorene

$$\vec{e}_{\hat{\mu}} = (\vec{e}_{\hat{1}} = \vec{t}, \vec{e}_{\hat{2}} = \vec{n}, \vec{e}_{\hat{3}} = \vec{b}) \quad (10.24)$$

et ortonormert aksekors i hvert punkt på kurven:

$$\vec{e}_{\hat{\mu}} \cdot \vec{e}_{\hat{\nu}} = \delta_{\mu\nu} . \quad (10.25)$$

Frenet's ligninger (10.23) er ikke noe annet enn en spesiell utgave av Eq.(5.105)

$$\underline{d}\vec{e}_{\hat{\nu}} = \vec{e}_{\hat{\mu}} \underline{\Omega}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{\hat{\mu}} \quad (10.26)$$

for det tilfelle at aksekorset sitter på en kurve i rommet. Forflytningen er da gitt ved basisformen

$$\underline{\omega}^{\hat{1}} = \underline{ds} . \quad (10.27)$$

De to andre er begge lik null slik at konneksjonsformene blir

$$\underline{\Omega}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{\hat{\mu}} = \begin{pmatrix} -0 & +\kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & +\tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \underline{ds} \quad (10.28)$$

hvor vi har benyttet at de er antisymmetriske i sine to nederste indekser.

Videre har vi definert

$$\underline{\Omega}_{\hat{2}\hat{1}}^{\hat{2}} = \kappa \underline{ds}$$

$$\underline{\Omega}_{\hat{3}\hat{2}}^{\hat{3}} = \tau \underline{ds}$$

Den tredje uavhengig konneksjonsformen $\underline{\Omega}_{\hat{3}\hat{1}}^{\hat{3}} = 0$ fordi vi har valgt å definere $\vec{n} = \vec{e}_{\hat{2}}$ langs den deriverte av $\vec{t} = \vec{e}_{\hat{1}}$.

10.2 Flater i rommet

Avbilder vi det 2-dimensjonale plan R^2 på punkter i det 3-dimensjonale, euklidiske rom E^3 , får vi en flate i dette rommet. Hvis R^2 er parametrisert ved koordinatene (u,v) , kan denne avbildningen skrives som

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = x^k(u,v) \vec{e}_k . \quad (10.29)$$

Det er derfor naturligt å kalle u og v for koordinatene til hvert punkt på flaten. Holder vi for eksempel $v = \text{konst.}$ og varierer u , vil

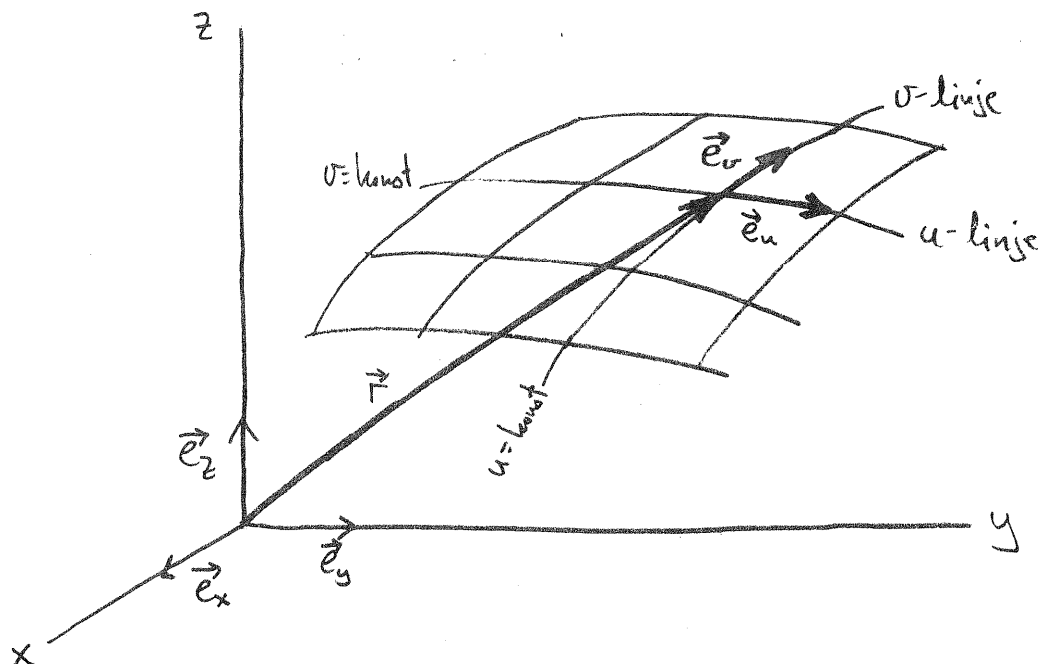


Fig. 10.3: I hvert punkt på flaten er der basisvektorer som tangerer koordinatlinjene.

vi beskrive en koordinatlinje i flaten som vi kaller en u -linje. Hver ny konstant v gir en tilsvarende ny u -linje. Disse kurvene i flaten har tangentvektorer

$$\vec{e}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}. \quad (10.30)$$

På samme måte er

$$\vec{e}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}. \quad (10.31)$$

tangentvektor til v -linjene hvor $u = \text{konstant}$. Lar vi altså koordinatene være $x^\mu = (x^1, x^2) = (u, v)$, vil der i hvert punkt på flaten være to basisvektorer

$$\vec{e}_\mu = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^\mu} \quad (10.32)$$

som vist i Fig. 10.3. Disse danner et lokalt plan som kalles tangentplanet til flaten.

En kurve $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ i E^2 vil avbildes som en annen kurve på flaten med tangentvektor

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \vec{e}_\mu \quad (10.33)$$

som derfor ligger i tangentplanet. Lengden av denne kurven er gitt ved Eq.(10.3). Nå har vi at

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right|^2 &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu \\ &= g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \end{aligned} \quad (10.34)$$

$$\text{hvor} \quad g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu \quad (10.35)$$

er metrikken på flaten. Lengden av kurven i flaten er derfor gitt ved det differensielle linje-element

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (10.36)$$

Fra Eq.(10.35) ser vi at

$$|\vec{e}_u| = \sqrt{g_{uu}}, \quad |\vec{e}_v| = \sqrt{g_{vv}} \quad (10.37)$$

mens g_{uv} gir vinkelen mellom u - og v - linjene:

$$\cos\theta_{uv} = \frac{g_{uv}}{\sqrt{g_{uu} g_{vv}}} \quad (10.38)$$

Når $g_{uv} = 0$ er altså koordinatene ortogonale.

Arealet av et lite parallelogram mellom vektorene $\Delta u \vec{e}_u$ og $\Delta v \vec{e}_v$

$$\Delta \vec{A} = (\vec{e}_u \times \vec{e}_v) \Delta u \Delta v. \quad (10.39)$$

Dette vektorproduktet er normalt på flaten. Innfører vi den normerte flatenormal

$$\vec{N} = \frac{\vec{e}_u \times \vec{e}_v}{|\vec{e}_u \times \vec{e}_v|} \quad (10.40)$$

hvor $\vec{N} \cdot \vec{e}_\mu = 0$ (10.41)

og $\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$, (10.42)

kan $\Delta \vec{A}$ skrives som

$$\Delta \vec{A} = \vec{N} |\vec{e}_u \times \vec{e}_v| \Delta u \Delta v.$$

Men nå er

$$\begin{aligned} (\vec{e}_u \times \vec{e}_v)^2 &= (\vec{e}_u \cdot \vec{e}_u)(\vec{e}_v \cdot \vec{e}_v) - (\vec{e}_u \cdot \vec{e}_v)^2 \\ &= g_{uu} g_{vv} - g_{uv}^2 \\ &= \det(g_{\mu\nu}) = |g| \end{aligned} \quad (10.43)$$

ved bruk av (10.37). Derfor har vi til slutt at

$$\Delta A = \sqrt{|g|} \Delta u \Delta v \quad (19.44)$$

som stemmer med hva vi har funnet tidligere, Eq. (3.70).

10.3 Kovariant derivasjon

Hvis vi betrakter komponentene til et vektorfelt $\vec{A}(x^k)$ langs en kurve $x^k(\lambda)$ i det 3-dimensjonale, euklidiske rom, vil dette være parallelt langs kurven hvis vektorkomponentene ikke forandrer seg:

$$\vec{e}_k \cdot \frac{d\vec{A}}{d\lambda} = 0. \quad (10.45)$$

På samme måte vil vi si at et vektorfelt $\vec{A}(x^\mu)$ på en flate er parallelt langs en kurve $x^\mu(\lambda)$ hvis

$$\vec{e}_\mu \cdot \frac{d\vec{A}}{d\lambda} = 0. \quad (10.46)$$

I praksis betyr dette at vi forlanger at variasjonen av vektorkomponentene i flaten er null. Hva som skjer med forandringen av vektoren normalt på