Løysingsframlegg ekstraoppgåve

This is written In Norwegian so our international students can practice a bit.

Oppgåve 4.3.2

1) Dei partielt deriverte vi treng er

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)} &= D^\mu\Phi \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^*} &= -m^2\Phi - iqA_\mu D^\mu\Phi\ .\end{aligned}$$

Bevegelseslikninga er

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^*}\ .$$

Ved innsetting får vi

$$\partial_\mu D^\mu\Phi = -m^2\Phi - iqA_\mu D^\mu\Phi\ ,$$

eller

$$\underline{\underline{(D_\mu D^\mu + m^2)\Phi = 0}}\ .$$

2) Dei elektriske og magnetiske felta er gjevne ved

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\ , \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}\ .$$

Sidan $A^0 = \Phi = 0$ og $\mathbf{A}$ er tidsuavhengig, er $\mathbf{E} = 0$. Magnetfeltet er

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ &= \underline{\underline{B\mathbf{k}}}\ .\end{aligned}$$

3) Vi har

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi)} &= D^0\Phi^* \;, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi^*)} &= D^0\Phi \;.\end{aligned}$$

Bidraget til Hamiltontettheiten frå skalarfeltet er

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \dot{\Phi}D^0\Phi^* + \dot{\Phi}^* D^0\Phi - (D_\mu\Phi)^*(D^\mu\Phi) + m^2\Phi^*\Phi \\ &= (\partial_0\Phi^*)\,(\partial_0\Phi) + [(\partial_x - iqBy)\Phi^*]\,[(\partial_x + iqBy)\Phi] + (\partial_y\Phi^*)\,(\partial_y\Phi) + m^2\Phi^*\Phi \;.\end{aligned}$$

der vi har brukt at $D_0 = \partial_0$ og $D_x = \partial_x$. Frå "nyttige formlar" på side fire i oppgåveteksten har vi $H_{\text{Maxwell}} = (E^2 + B^2)/2$. Med $\mathbf{E} = 0$, blir Hamiltontettheiten

$$\mathcal{H} = \underline{\underline{(\partial_0\Phi^*)\,(\partial_0\Phi) + [(\partial_x - iqBy)\Phi^*]\,[(\partial_x + iqBy)\Phi] + (\partial_y\Phi^*)\,(\partial_y\Phi) + m^2\Phi^*\Phi + B^2/2}} \;.$$

Ja, Hamiltontettheiten er Lorentzinvariant.

4) Løysinga til Klein-Gordon likninga kan skrivast

$$\underline{\underline{\Phi(\mathbf{x},t) = e^{-i(Et - p_x x)} f(y)}} \;.$$

Ved innsetting av dette uttrykket i Klein-Gordon likninga finn ein

$$\underline{\underline{\left[-\frac{\partial^2}{\partial y^2} - E^2 + m^2 + (p_x - qBy)^2\right] f(y) = 0}} \;.$$

Dette kan vi skrive som

$$-\frac{1}{2m}\frac{d^2 f(y)}{dy^2} + \frac{(p_x - qBy)^2}{2m} f(y) = \frac{E^2 - m^2}{2m} f(y) \;.$$

Dette er likninga for ein harmonisk oscillator med sentrum i p_x/qB, med frekvens $\omega^2 = q^2B^2/m^2$ og energi $(E^2 - m^2)/2m$. Sidan energien til ein oscillator er$E_n = (1/2 + n)\omega$, finn ein

$$\underline{\underline{E^2 = m^2 + qB(2n + 1)}} \;.$$